О точечном множестве, проходимом любой алгебраической кривой

Д. Мордухай-Болтовской (Ростов-на-Дону)

§ 1. Точечным множеством называется такое, которое не содержит континуумы своими частями. Можно построить, как было показано Zoretti [1], Denjoy [2], Rosenthal [3], такое замкнутое точечное множество, что всякая прямая на плоскости обязательно пройдет через какую-либо точку этого множества.

В настоящей статье я задаюсь целью построения такого точечного множества, что любая алгебраическая кривая проходит через его точку.

При этом, так как при выводе нами использованы только самые общие свойства алгебраических кривых, наши утверждения будут оставаться в силе и для класса кривых значительно более общего.

Основой нащего построения служит замкнутое точечное множество с непрерывной проекцией, которое мы означаем через $\mathfrak{Q}(1)$.

Выразим одну координату x в троичной, другую же y — в двоичной системе счисления, предполагая их меньше единицы, т. е. положим:

$$x=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\ldots=0, a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots, \tag{1}$$

а

$$y=\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{2^3}+\ldots=0, b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots, \tag{2}$$

причем между b_j и a_j устанавливаем соответствие:

если

$$b_n=0 \text{ то } a_n=0$$
$$b_n=1 \qquad a_n=2,$$

так что совокупность y образует континуум, а совокупность x дает точечное множество.

Все множество заключается в квадрате $Q(1)$, ограниченном прямыми

$$x=0,\ y=0,\ x=1,\ y=1.$$

[1] Comptes Rendus, t. 142 (1906), „Leçons", p. 23.

[2] Comptes Rendus 149 (1909).

[3] Rosenthal, Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller veränderlicher Grössen, Enc. der Math. Wiss., II. K., 9, S. 934.

От этого множества к множеству, заполняющему всю плоскость и, конечно, тоже точечному, мы переходим параллельным OX и OY переносом этого квадрата. Вся плоскость тогда заполняется сетью квадратов $S(1)$, содержащей точечное множество $\overline{\Omega}(1)$.

Мы можем затем повернуть эту сеть вокруг вершины одного из квадратов на угол α, что нам даст новое множество $\overline{\Omega}_\alpha(1)$ в новой сетке $S_\alpha(1)$.

Для дальнейшего будет иметь значение поворот на $\frac{k\pi}{6}$, $k=1, 2, 3, 4, 5$, с помощью которого мы получаем положенными на данную сетку еще пять сеток.

Все шесть сеток образуют сетку $\overline{S}(1)$, содержащую точечное множество $\Omega(1)$.

Из множества $\Omega(1)$ подобным преобразованием, изменяя x и y в отношении $k:1$, получаем еще множество $\Omega(k)$, заключающееся в квадрате $Q(k)$, ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$, $x=k$, $y=k$.

Точно таким же образом из $\overline{\Omega}(1)$, $\overline{\overline{\Omega}}(1)$ получаем и $\overline{\Omega}(k)$, $\overline{\overline{\Omega}}(k)$, ...

Взяв ряд рациональных чисел:

$$\ldots < \frac{1}{k_2} < \frac{1}{k_1} < 1 < k_1 < k_2 < \ldots,$$

мы получаем, беря для k числа этого ряда, счетное множество точечных множеств $\overline{\overline{\Omega}}(k) \ldots \Omega$, заключенное внутри сетки S.

§ 2. Заметим теперь, что значению:

$$y=0,\, b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots$$

отвечают два значения x.

Если брать y в форме

$$y=0,\, b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1}\, 1, \tag{3}$$

то

$$x=0,\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}\, 2. \tag{4}$$

Но, если ту же величину y взять в другой форме:

$$y=0,\, b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1}\, 0111 \ldots, \tag{5}$$

которая сводится к (3) на том основании, что

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{2},$$

то получим другое значение x:

$$x=0,\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}\, 022 \ldots = 0,\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}\, 1, \tag{6}$$

так как

$$\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots = \frac{1}{3},$$

при этом значение (4) отличается от (6) на $\frac{1}{3^n}$.

Если мы теперь будем соединять прямыми (параллельными OX): (x_1, y_1), (x_2, y_2), то получим кривую Жордана, которую означим через $L[\Omega(1)]$.

Действительно, здесь y — непрерывная функция от x, причем каждому значению x отвечает одно определенное значение y.

В каждом квадрате $Q(k)$ вместе с множеством $\Omega(k)$ будет и отвечающая ей кривая $L[Q(k)]$.

§ 3. В квадрате $Q(k)$ берем такую кривую $L[\Omega(k)]$.

На стороне же квадрата $\parallel OY\ldots AB$ (рис. 1) берем точку M, а на отрицательной оси OX точку N, тогда прямая NM обязательно пересечет кривую

$$OB : L[\Omega(k)].$$

В самом деле, взяв к AB бесконечно близкую прямую $A_1B_1 \parallel AB$ и взяв продолжение от точки B диагонали квадрата $Q(k): OABC$, мы будем иметь замкнутый контур

$$OA_1B_1BO.$$

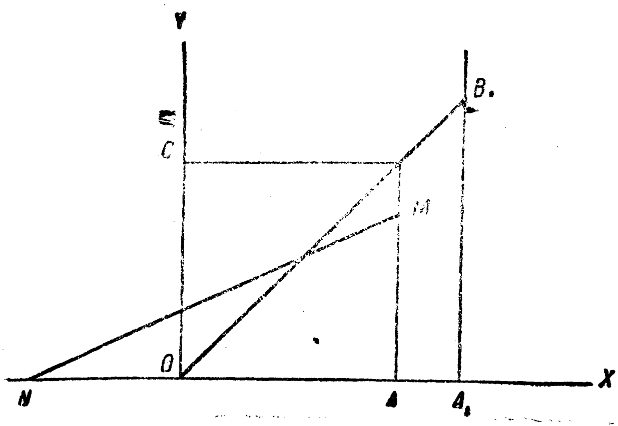

Рис. 1.

NM, соединяя внешнюю точку с внутренней, по теореме Жордана [1] обязательно пересекается контуром OA_1B_1BO между N и M, причем не частью OA, так как тогда NM совпала бы с OX, и не BB_1, которую берем меньше всякой данной величины.

Но к этому следует прибавить, что эта прямая обязательно проходит через какую-либо точку множества $\Omega(k)$.

Предположим, что существует последняя, при следовании от N к M точка пересечения, не совпадающая с концом отрезка элемента, параллельного OX, входящего в кривую $L[Q(k)]$. Тогда получается прямая, имеющая точку P вне контура, образуемого: 1) частью $L[Q(k)]$ над этим отрезком, 2) прямой $\parallel OX$, идущей по этому отрезку, и 3) прямой $AB \parallel OY$.

Рассуждением, совершенно аналогичным приведенному выше, устанавливаем противно сделанному сейчас предположению, что кривая $L[Q(k)]$ еще раз пересекается прямой NM, т. е. что точка Q не последняя.

§ 4. Теперь вместо прямой, соединяющей M с N, возьмем кривую $y = f(x)$, предполагая:

1) непрерывность $f(x)$ от N до M,
2) существование $f'(x)$, и при этом тоже непрерывной,
3) убывание $f(x)$ в этом промежутке,

---

[1] C. Jordan, Cours d'Analyse, T. I (1893), p. 90—99.

4) равенство углов, образуемых касательными в крайних точках дуги с хордой, причем каждый угол предполагается не больше $\frac{\pi}{12}$.

Отметим, что при принятии за OX хорды NM условия теоремы Ролля оказываются выполненными, и между N и M будем иметь касательную параллельную хорде NM.

Так как у алгебраической кривой число асимптот, точек перегиба и особенных точек — конечно, производная y по x, вообще, существует и имеет конечное число maxima и minima, то для алгебраической кривой всегда существуют такие дуги.

Но угол при хорде ω может и не превосходить определенной границы, а именно, в случае прямой он оказывается всегда нулем.

Мы возьмем дугу, для которой $\omega = \frac{\pi}{12}$, если такую дугу можно найти, а если нет, то для ω возьмем наибольшее значение $\overline{\omega}$. При этом дуг с углом $\overline{\omega}$ может быть бесконечное множество.

Выбираем ту, для которой хорда имеет наибольшую величину. Возьмем теперь алгебраическую кривую с хордой $\overline{s}$, таким образом выбранной.

Рассуждениями § 3 для $\overline{s}$ можно получить тот же результат, что для прямой: во-первых пересечение с $L[\Omega(k)]$, во-вторых прохождение через множество $\Omega(k)$.

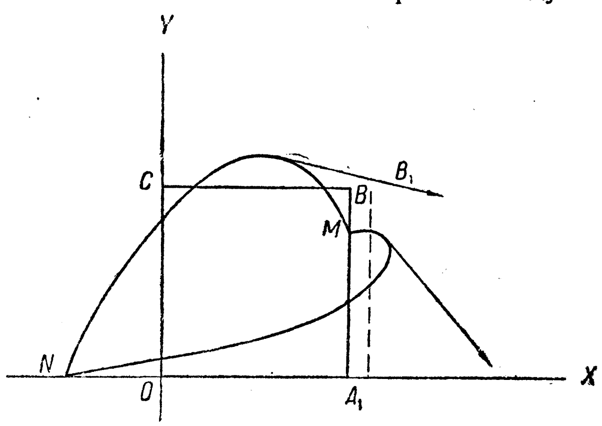

Рис. 2.

В самом деле, для этого следует только убедиться в том, что пересечение с $\overline{s}$ между N и M не может быть ни на BC, ни на AB.

В первом случае (рис. 2) между N и M будет существовать касательная LT, параллельная хорде x, за которую принимаем в случае двух точек пересечения с BC хорду, направленную по BC или под некоторым малым углом к ней; в случае единичной точки пересечения, хорду — соединяющую M с точкой пересечения с OY. Такая касательная противно сделанному относительно $\overline{s}$ условию образует тупой угол с OX.

Во втором случае убеждаемся в том же, взяв за хорду $\overline{s}$ хорду, идущую по A_1B_1, или соединяющую точку пересечения с ней кривой с точкой пересечения с OX.

§ 5. Зададим длину хорды для дуги $\overline{s}: a$ и, предполагая, что эта хорда образует с OX угол не больше $\frac{\pi}{6}$, будем искать:

1) сторону квадрата $Q(k)$, ограниченного прямыми $x=0$, $x=k$, $y=0$, $y=k$,

2) сторону квадрата $q(l)$, ограниченного прямыми $x=-a$, $x=-l-a$, $y=0$, $y=l$, внутри которого находится N, так, чтобы для хорды были выполнены условия § 3, 4 и, следовательно, дуга $\overline{s}$ проходила бы через множество $\Omega(k)$, а именно, чтобы N находилась вне прямоугольника $KIBC$ на его стороне KI, а M на его стороне BI (рис. 3).

Мы сейчас увидим, что, задав a, можно найти соответствующее ему l, а по $l \ldots k$.

Условием нахождения M внутри отрезка AB является $MA<k-IA$, которое выполняется, если

$$MA<k-l,$$

а так как

$$MA<a\sin\frac{\pi}{6}=\frac{a}{2},$$

то оно выполняется при

$$k>\frac{a}{2}+l. \tag{7}$$

Условием нахождения точки N вне квадрата Q является $NI>k+l$, а так как

$$MI\geqslant a\cos\frac{\pi}{6}=a\frac{\sqrt{3}}{2},$$

то можно взять

$$k+l<a\frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{8}$$

так что

$$\frac{a}{2}+l<k<\frac{a\sqrt{3}}{2}-l,$$

или

$$l=\frac{a(\sqrt{3}-1)}{4} \tag{9}$$

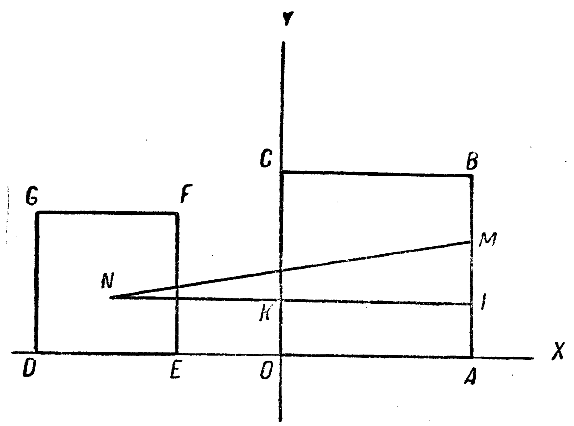

Рис. 3.

и

$$k>\frac{a}{2}+l. \tag{10}$$

Если задавать не точно a, а только п р о м е ж у т о к, в котором a заключается:

$$\underline{a}<a<\overline{a},$$

то (9) и (10) выполняются при

$$l<\frac{\underline{a}(\sqrt{3}-1)}{4}, \tag{9}$$

$$k>\frac{\overline{a}}{2}+l. \tag{10}$$

§ 6. Введем теперь некоторую поправку в определение § 4. Будем брать за $\bar{\omega}$ не наибольшее возможное вообще значение ω, а наибольшее возможное значение, заключающееся в ряду

$$e_1 > e_2 > e_3 > \ldots, \tag{e}$$

где $\operatorname{tg} e_i$ представляют убывающие рациональные числа, например такие, что

$$\tau_i = \operatorname{tg} e_i = \frac{1}{2^{2+i}},$$

причем $e_1 < \frac{\pi}{12}$.

Конечно для каждого такого значения l будут выполнены условия, требуемые § 5. Вследствие непрерывности $f(x)$ и $f'(x)$, если существует дуга с $\omega = \bar{\omega}$, то найдется ее часть с углом ω, меньшим $\bar{\omega}$, и с значением, заключающимся в ряду (e).

Обозначая начало и конец дуги через (x_1, y_1), (x_2, y_2), будем иметь:

$$\frac{(y_2 - y_1) - y_1'(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)y_1'} = \tau, \tag{11$_1$}$$

$$\frac{y_2'(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)}{(y_2 - y_1)y_2' + (x_2 - x_1)} = \tau, \tag{11$_2$}$$

где $\tau = \operatorname{tg} e$, а e — член ряда (e).

Подставляя сюда из уравнений, получаемых диференцированием

$$f(x_1, y_1) = 0, \tag{12$_1$}$$

$$f(x_2, y_2) = 0, \tag{12$_2$}$$

значения

$$y_1' = \frac{-\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}},$$

$$y_2' = \frac{-\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial f_2}{\partial y_2}},$$

приводим уравнения (11_1) и (11_2) к виду:

$$h(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0, \tag{13$_1$}$$

$$g(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0, \tag{13$_2$}$$

где h, g — полиномы от x_1, y_1, x_2, y_2 с коэфициентами, полученными с помощью рациональных действий над коэфициентами

$$f(x, y) = 0 \tag{12}$$

и целыми числами.

Длина хорды

$$a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{14}$$

определяется решением уравнений (12_1), (12_2), (13_1), (13_2) относительно (x_1, y_1), (x_2, y_2), выбирая из решений те, при которых a, определяемая формулой (14), имеет наибольшее значение.

Результат исключения (x_1, y_1, x_2, y_2) дает

$$\alpha_0 a^n + \alpha_1 a^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0. \tag{15}$$

Беря $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ и

$$A_{k-1}^{(i)} < |\alpha_j| < A_k^{(i)}, \tag{16}$$

где

$$A_k^{(i)} = 2^k,$$

$$k = -\infty \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \infty.$$

Мы получаем для определенного e счетное множество континуумов алгебраических кривых

$$E_1, E_2, E_3, \ldots$$

Для каждого в силу неравенств (16) будем иметь:

$$\underline{a}_k < a < \overline{a}_k, \tag{17}$$

и таких неравенств будем иметь счетное множество.

Если бы взяли промежутки, определяемые рациональными числами

$$\infty > \ldots > a_3 > a_2 > a_1 > \ldots > 0,$$

$$a_k = 2^k,$$

то каждому промежутку отвечал бы или континуум E_i, или только его часть E_i'; первое—в том случае, если ($\underline{\alpha}_i$, $\overline{\alpha}_i$) заключается в (a_{i-1}, a_i), второе,—если, наоборот, (a_{i-1}, a_i) заключается в ($\underline{\alpha}_i$, $\overline{\alpha}_i$).

Во всяком случае, всем промежуткам (a_{i-1}, a_i) отвечали бы всевозможные кривые с данным e, и все это множество разбивалось бы на счетное множество [a, e] континуумов $E(a, e)$ с данными e и с a, заключающимися в промежутке (a_{i-1}, a_i).

Для того чтобы каждому такому континууму отвечал свой определенный промежуток для a, мы должны еще разделить (a_{i-1}, a_i) на конечное или, во всяком случае, счетное множество промежутков.

§ 7. Далее, $E(a, e)$ можно разбить на шесть континуумов

$$E(a, e, \vartheta_1),\ E(a, e, \vartheta_2),\ E(a, e, \vartheta_3),\ E(a, e, \vartheta_4),\ E(a, e, \vartheta_5),\ E(a, e, \vartheta_6),$$

отвечающих углам наклонения хорды дуги $\overline{s}$ в промежутках

$$\left(\frac{(i-1)\pi}{6}, \frac{i\pi}{6}\right).$$

В свою очередь, $E(a, e, \vartheta)$ представляется опять как счетное множество $[a, e, \vartheta, N]$ континуумов кривых $E(a, e, \vartheta, N)$, где N взято внутри квадрата $q(l)$, и других, получаемых его перенесением параллельно OX, OY, причем

$$l = \lambda_j,$$

где λ_j — рациональное число, выбранное так, что

$$\frac{a_{j+1}(\sqrt{3}-1)}{4} < \lambda_j < \frac{a_j(\sqrt{3}-1)}{4}; \tag{18}$$

причем для квадрата $Q(k)$, отвечающего в смысле § 5 квадрату $q(l)$, следует взять:

$$k = \frac{a_{j+1}}{2} + \lambda_j. \tag{19}$$

Про множество кривых $E(a, e, \vartheta, N)$ мы наверное можем сказать, что каждая кривая этого множества проходит через какую-либо точку множества $\Omega(k)$, где k определяется уравнением (19).

Чтобы построить такое множество для $E(a, e, \vartheta)$, следует взять сетку $S_\vartheta(k)$, заключающей множество, тоже точечное $\overline{\Omega}(k)$.

Для построения же множества, проходимого $E(a, l)$, следует перейти от сетки $S_\vartheta(k)$ к шести сеткам, отвечающим различным значениям $\vartheta = \vartheta_i$:

$$\left(\frac{(i-1)\pi}{2} < \vartheta_i < \frac{i\pi}{2}\right),$$

образующим вместе сетку $S(k)$ с множеством $\Omega(k)$.

Переход к $E(e)$ делается собиранием в счетное множество сеток $S(k)$, отвечающих различным k, соответственно промежуткам для a, и, наконец, ко всей совокупности E сгущением нашей сетки $S(k)$ и соответственно ей и сетки, заключающей N, делением (a_{i-1}, a_i) на счетное множество промежутков и определением значений k, им отвечающих по формуле (19).

В результате мы получаем точечное множество, наверно пересекаемое всякой алгебраической кривой.

§ 8. В заключение заметим, что алгебраическую кривую в наших рассуждениях мы можем заменить кривой

$$f(x, y) = 0,$$

левая часть уравнения которой выражается в лиувиллевском смысле в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных.

Для обобщения изложенного в нашей заметке положения необходимо установить:

а) существование для такой кривой дуги, удовлетворяющей условиям 1—4 § 4, и б) образование решениями уравнений (13_1) и (13_2) счетного множества.

Последнее же вытекает:

1) из того, что множество типов построений, т. е. буквенных выра-

жений, из которых они получаются путем замены букв числами, не равными нулю, представляет счетное множество;

2) из того, что значениям букв в определенном промежутке отвечает счетное множество промежутков для a.

(Поступило в редакцию 30/IV 1932 г.)

Über eine von einer beliebigen algebraischen Kurve getroffene punkthafte Menge.

D. Morduchai-Boltowskoi (Rostow-Don)

(Résumé)

In diesem Aufsatz stellen wir die Aufgabe, eine solche geschlossene punkthafte Menge zu konstruieren, dass eine beliebige algebraische Kurve einen ihrer Punkte trifft.

Als Base unserer Konstruktion dient eine geschlossene Menge mit einer kontinuierlichen Projektion $\Omega(1)$, welcher sich Rosenthal bei der Konstruktion der Menge bediente, die von einer beliebigen Geraden getroffen ist.

Wir weisen auf die fundamentalen Operationen über $\Omega(1)$: die parallele Übertragung, die Drehung um den Winkel 30° und die Ähnlichkeitstransformation hin, welche die Mengen $\Omega(1)$, $\bar{\bar{\Omega}}_\alpha(1)$ und $\bar{\bar{\Omega}}(k)$ geben.

Wir beweisen, dass ein Kontinuum der Geraden existiert, welche die Jordansche Kurve durchschneiden, die aus Strecken zwischen den Paaren der Punkte mit einem und demselben Werte von y und mit zwei entsprechenden Werten von x besteht. Der Schnitt befindet sich am Ende der Strecke, d. h. in einem Punkte der Menge $\Omega(1)$.

Hiernach beweisen wir, dass man dieses Kontinuum der Geraden durch ein Kontinuum der algebraischen Kurven, die gewisse Bedingungen befriedigen, ersetzen kann.

Endlich zeigen wir, dass man mit Hilfe der obenerwähnten Operationen über $\Omega(1)$ eine punkthafte geschlossene Menge konstruieren kann, welche einer abzählbaren Menge solcher Kontinua der Kurven entspricht, wobei diese Menge eine solche ist, dass sie alle möglichen algebraischen Kurven enthält.